УДК 519.95

ВЫСОКОТОЧНЫЙ АЛГОРИТМ СЕПАРАЦИИ ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫХ МАТРИЦ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СИМВОЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Л.Ф.АГАМАЛИЕВА
Институт Прикладной Математики,
Бакинский Государственный Университет
latifa.agamalieva@gmail.com

В работе, используя символьное вычисление на базе пакета MATLAB, создан высокоточный алгоритм для сепарации дробно-рациональных матриц относительно мнимой оси и единичной окружности.

Ключевые слова: сепарация, дробно-рациональные матрицы, высокоточный алгоритм.

В последнее время с применением новых компьютерных технологий и созданием новых пакетов прикладных программ точность результатов решения некоторых класс задач значительно увеличилась.

Следует особо отметить Symbolic Toolbox пакета MATLAB, процедуры которого используют символьные вычисления.

Система символьных вычислений мощный программный продукт способный решать широкий круг задач с различным уровнем вычислительной сложности, начиная от простых преобразований выражений: полиномов, рядов, рациональных функций и формул, и вплоть до решения различных систем уравнений. У таких систем есть ряд преимуществ перед системами, которые производят вычисления численно.

Большинство математических систем, используемых в работе с компьютером, являются численными системами. Такие результаты вычислений редко бывают абсолютно точными - как правило, при операции с вещественными числами происходит их округление. Реализация большинства численных методов базируется на заведомо приближенных численных методах. Часто из-за накопления погрешности эти методы расходятся. За приделами возможностей численных математических систем оказались обширные области математики, связанные с проведением аналитических расчетов. Символьные операции – это то, что кардинально отличает системы символьной математики от систем для выполнения численных расчетов.

В данной работе, используя символьное вычисление на базе пакета MATLAB, создан высокоточный алгоритм для сепарации дробно-рациональных матриц относительно мнимой оси и единичной окружности. Известно, что процедура сепарации связано с нахождением нулей полинома [5, 6]. Следует отметить крайнюю неустойчивость корней некоторых полиномов как функций от их коэффициентов. Многие задачи, включающие в себя нахождение нулей полиномов, требует точного вычисления коэффициентов полиномов. Здесь рассматривается вычислительный алгоритм сепарации правильной дроби не связанный с нахождением корней полинома [1, 2, 4] и предложен алгоритм решения полиномиальных уравнений.

Постановка задачи

Известно, что алгоритмы оптимизации в пространствах Харди включает процедуру представления правильной дробно-рациональной матрицы в виде суммы двух матриц. Такая процедура реализуется путем нахождения корней полинома.

Представим дробно-рациональную матрицу V в виде

$$V = V_0 + V_+ + V_- \ ,$$

где V_0 -полиномиальная матрица, V_+ и V_- дробно-рациональные матрицы, элементы которых являются правильными дробями с полюсами в левой и в правой полуплоскости, либо внутри и вне единичной окружности.

Сепарация дробно-рациональные матрицы осуществляется поэлементно, и может быть проведена без определения нулей полинома путем вычисления проекторов на соответствующие инвариантные (корневые) подпространства. Но с вычислительной точки зрения этот подход не всегда является эффективным. В этой связи предложены алгоритмы, позволяющие реализовать упомянутую процедуру без нахождения корней полиномов [1,2,3].

Элементы матрицы V_0 являются целыми частями соответствующих элементов матрицы V и находятся в результате деления числителя на знаменатель. Дробные части образуют матрицу

$$V_+ + V_- = \left[\frac{b_{ij}(s)}{a_{ij}(s)} \right] = \left[\frac{b_{ij}^{(1)} s^{n-1} + b_{ij}^{(2)} s^{n-2} + \ldots + b_{ij}^{(n)}}{s^n + a_{ij}^{(1)} s^{n-1} + \ldots + a_{ij}^{(n)}} \right], \qquad (1)$$

элементы которой являются правильными дробями $i = 1,2,\ldots,n; \quad j = 1,2,\ldots,n$ (степень числителя меньше степени знаменателя).

Следует отметить, что поскольку элементы дробно-рациональной матрицы $V_+ + V_-$ не имеют полюсов на мнимой оси либо на единичной окружности, то соответствующие проекторы сравнительно просто вычисляются с помощью матричной сигнум функции.

Сепарация дробно-рациональных матриц относительно мнимой оси

Рассмотрим алгоритм сепарации в случае правильной дроби. Пусть передаточная функция V является правильной дробью

$$V_+ + V_- = \left[\frac{b_{ij}(s)}{a_{ij}(s)}\right] = \left[\frac{b_{1ij}(s)}{a_{1ij}(s)}\right] + \left[\frac{b_{2ij}(s)}{a_{2ij}(s)}\right],$$

нули полиномов $a_1(s),\ a_2(s)$ лежат по разные стороны от мнимой оси, n_l – степень полинома $a_l(s),\ l=1,2,\ \ n_1+n_2=n,\ \ \ n_1 \le n_2$.

Предположим, что вычислен полином $a_1(s)$ (далее индексы i, j опускаются). Из $a(s)=a_1(s)a_2(s)$ получаем

$$a_2(s) = \frac{a(s)}{a_1(s)}. \tag{2}$$

После определения $a_1(s)$ и $a_2(s)$ полиномы $b_1(s)$ и $b_2(s)$ находятся из решения полиномиального уравнения

$$b(s) = a_2(s)b_1(s) + a_1(s)b_2(s). \tag{3}$$

Опишем процедуру вычисления полинома $a_1(s)$. Предположим, что $b_1(s)=1$.

Представление в пространстве состояния правильной дроби $\dfrac{1}{a(s)}$ следующее

$$\frac{1}{a(s)} = C(Es-A)^{-1}\cdot\alpha,$$

где

$$a(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n$$

$$C=[1\ 0 \ldots 0],\ \ \alpha' = [0\ \ 0 \ldots 1],$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \ldots & E_{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_1 \end{bmatrix}, \tag{4}$$

E -единичная матрица размерности $n-1$.

Предполагается, что матрица A не имеет собственных значений на мнимой оси.

Представим $(Es-A)^{-1}$ в виде

$$(Es-A)^{-1} = (Es-AA_*)^{-1}A_+ + (Es-AA_-)^{-1}A_-.$$

Неортогональные проекторы на инвариантном подпространстве матрицы A обозначим как

$$A_+ = \frac{E - signA}{2},\ \ A_- = \frac{E + signA}{2}. \tag{5}$$

Вычисление $signA$ состоит из следующих шагов

$$signA = \lim_{k\to\infty} A_k; \qquad A_{k+1} = \frac{A_k + A_k^{-1}}{2}, \quad k = 0,1,2,...,$$

$A_0 = A,$

A^{-1} существует, так как $a(s)$ не имеет нулей на мнимой оси. Вычислим ранг матрицы AA_+ и AA_-.

$$rank(AA_+) = r_+; \quad rank(AA_-) = r_-; \qquad n_1 = \min(r_+, r_-).$$

Вычисляем

$$X' = \left[\left(C(AA^*)^{n_1+1}\right)', ..., \left(C(AA^*)\right)' \right],$$

где

$$A^* = \begin{cases} A_+ & r_+ < r_- \\ A_- & иначе \end{cases}.$$

С помощью QR-разложение матрицу приводим к треугольному виду (процедура qr.m пакета Matlab. $[L,U] = qr(X)$, U - верхняя треугольная матрица). Последняя строка приведенной матрицы будет нулевой, а элементы последней строки матрицы U - коэффициенты полинома $a_1(s)$ в порядке убывания степеней. Если полином $a_1(s)$ вычисляется с некоторой ошибкой, то необходимо провести уточнения коэффициентов полинома $a_2(s)$.

Таким образом, алгоритм сепарации правильной дроби относительно мнимой оси состоит из следующих шагов:

1. Строится матрица (4)
2. Согласно (5) вычисляются A_+ и A_-.
3. Формируется матрица X .
4. Вычисление полинома $a_1(s)$
5. Определение полинома $a_2(s)$ согласно (2).
6. При необходимости производится уточнения коэффициентов полиномов $a_1(s)$, $a_2(s)$.
7. Решая полиномиальное уравнение (3) находятся полиномы $b_1(s)$, $b_2(s)$.

Для сепарации относительно окружности единичного радиуса модифицируется только первый шаг описанного алгоритма. В этом случае нули полиномов $a_1(s)$, $a_2(s)$ лежат по разные стороны от единичной окружности. Под A_+, A_- следует понимать проекторы на инвариантные подпространства матрицы A, отвечающие собственным значениям, лежащим внутри и вне единичной окружности. Эти проекторы вычисляются так [1,4]

$$A_+ = \frac{1}{2}(E - signB), \quad A_- = \frac{1}{2}(E + signB), \; B = (A - E)(A + E)^{-1}.$$

$(A + E)^{-1}$ существует, т.к. $a(s)$ не имеет нулей на единичной окружности.

Алгоритм решения полиномиальных уравнений

Полиномиальное уравнение имеет следующий вид

$$a_2 b_1 + a_1 b_2 = b \quad (6)$$

Здесь a_1, a_2, b – заданные полиномы, b_1, b_2 – неизвестные полиномы от s. Допустим полиномы a_1 и a_2 взаимно простые. На основе алгоритма Евклида, построен алгоритм решения полиномиального уравнения (6). Сущностью алгоритма Евклида является нахождением наибольшего общего делителя двух полиномов. Допустим, полином a_2 имеет большую степень, чем a_1. Разложим $\frac{a_2}{a_1}$ в непрерывную дробь вида:

$$\frac{a_2}{a_1} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + ..}} \; .. \; + \cfrac{1}{q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n}},$$

где $q_0, q_1, ..., q_n$ – полиномы.

Это разложение выполняется с помощью алгоритма Евклида, т.е. последовательным делением полиномов.

$$\begin{array}{ll}
a_2 = a_1 \cdot q_0 + r_1; & 0 \le \|r_1\| \le \|a_1\| \\
a_1 = r_1 q_1 + r_2; & 0 \le \|r_2\| \le \|r_1\| \\
r_1 = r_2 q_2 + r_3; & 0 \le \|r_3\| \le \|r_2\| \\
\dots\dots\dots\dots\dots & \\
r_{n-2} = r_n q_{n-1} + r_n; & 0 = \|r_n\| < \|r_{n-1}\| \\
r_{n-1} = r_n q_n & r_n = \rho
\end{array}.$$

Здесь $\|\cdot\|$-степень полинома. Полиномы a_2 и a_1 взаимно простые полиномы, их наибольшим общим делителем является полином нулевой степени, т.е. число $r_n = \rho$.

Полиномы $q_0, q_1, ..., q_n$ называются неполными частными, $r_1, r_2, ..., r_n$ остатки.

Обозначая через k_i и f_i числитель и знаменатель i – ой подходящей дроби, можно вывести следующие рекуррентные соотношения:

$$k_{i+1} = k_i q_i + k_{i-1},$$
$$f_{i+1} = f_i q_i + f_{i-1},$$

где $k_{-1} = 0;\ k_0 = 1,\ f_{-1} = 1;\ f_0 = 0.$

Решение уравнения (4) имеет вид:

$$b_1 = \frac{1}{\rho}(-1)^{n+1} f_n b + a_1 p\ , \quad b_2 = \frac{1}{\rho}(-1)^n k_n b - a_2 p\ ,$$

где p – произвольный полином.

Для получения минимального полинома b_1 достаточно найти остаток от деления полинома $\frac{1}{\rho}(-1)^{n+1} f_n b$ на a_1.

$$\frac{1}{\rho}(-1)^{n+1} f_n b = a_1 q + b_1$$

соответствующий полином b_2 можно получить из полиномиального уравнения (6).

Текст программы:

```
function [X,Y]=solvpol(a,b,c)
m=length(a)
[q0,r1]=bolme1(a,b)
delt=q0;
n=length(r1)
K1=q0;K0=[1];
F1=[1];F0=[0];
while n~=1
   [q1,r2]= bolme1(b,r1);
   n=length(r2);
   ro=r2;
   K2=polysum(vurma(K1,q1),K0);
   K0=K1;
   K1=K2;
   F2=polysum(vurma(F1,q1),F0);
   F0=F1;
   F1=F2;
   b=r1;
   r1=r2;
end
```

```
X=(1/ro)*(-1)^(m+1)*vurma(F2,c);
Y=(1/ro)*(-1)^(m)*vurma(K2,c);
%polysum(vurma(a,X),vurma(b,Y))
```

Эффективность алгоритма проиллюстрируем на следующем примере.

Пример.

Пусть полином, подлежащий сепарации имеет вид $\frac{1}{(s^2-1)^k}$.

Сепарация дроби $\frac{1}{(s^2-1)^k}$ из-за наличия кратных корней имеет определенную трудность. В [5] точность нахождения кратного корня $10^{-\frac{16}{k}}$.
Применяя вышеприведенный алгоритм при различных значениях k получены следующие результаты

$k = 2$

$a_1 = [-0.5 \quad 1 \quad -0.5]$,

$a_2 = [-2 \quad -4 \quad -2]$,

$b_1 = [-0.5 \quad 1]$

$b_2 = [-0.125 \quad 0.25]$

Погрешность $|a(s) - a_1 a_2| = 0$.

$k = 5$

$a_1 = [0.10 \quad -0.50 \quad 1 \quad -1 \quad 0.5 \quad -0.1]$,

$a_2 = [10.0 \quad 50.0 \quad 100.0 \quad 100.0 \quad 50.0 \quad 10.0]$,

$b_1 = [1.3671875 \quad 6.83593799 \quad 13.4765625 \quad 12.6953125 \quad 5.0]$,

$b_2 = [-0.01367185 \quad 0.068359374 \quad -0.13476562 \quad 0.126953125 \quad -0.05]$.

Таким образом, погрешность сепарации равна
$|a(s) - a_1 a_2| = 0.$

$k = 7$

a_1 = [-0.28571428571428480330807175846530e - 1, 0.20000000000000000000000000000000,
- 0.59999999999999831246100256976206, 1.0, - 0.99999999999999755750934582465561,
0.60000000000000000000000000000000, - 0.19999999999999995670130203961889 5,
0.28571428571428571428571428571429e - 1]

a_2 = [-35.000000000000111594761209588356561163697857327283346289325 63128,
- 245.000000000001562326656934239482534437655011814282641789 4665961,
- 735.000000000013003521870391758434136469826948813781000893 4768865,
- 1225.00000000008049807348475909168598167696417041079128530 8817915,
- 1225.00000000039149797986804477784342385482005511220526025 1244535,
- 735.000000001548452720212573241336264381051382408211722061 512530,
- 245.000000005148546346201085552192007807386531085710597858 658652,
- 35.0000000148215214754175753014642235984302315362038222692 99791],

b$_1$ = [-3.9477539058140294695039879964306449371532359127622405095 60763723,
- 27.634277340545817895013418642112552841650164503750649505 54250352,
- 82.543945302246655448645672380687424331573235753936114384 58949481,
- 135.65917966883047068044233664780870795287860994887446262 83325668,
- 130.75439451007720661322861845934035721941137687580274515 74753625,
- 71.179199203495812900248620984326214364785446553879975336 10419184,
- 17.499999993592702128177958831820393328221007093084035100 32926261]

b$_2$ = [0.32226562496440851390164597739130469987276981178673838675 05843379e - 2,
- 0.22558593747633138512687683539492752443656408228551135438 42518379e - 1,
0.67382812493371125615678605552440338993272908276055214331 19093182e - 1,
- 0.11074218748997074840826488664789737806368572767060409244 67958893,
0.10673828124132852768876206682588426769024953830238644512 00375646,
- 0.58105468745922282018168882695279431489604612238451494088 40840034e - 1,
0.14285714284895132354725054682702726008525094348954077849 61235581e - 1]

Точность этих вычислений равна $\left|a(s)-a_1a_2\right| = 1.8791\text{e}-012$. Отсюда видно, что этот алгоритм дает более точные результаты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алиев Ф.А., Бордюг Б.А., Ларин В.Б. H_2 оптимизация и метод пространства состояний в задаче синтеза оптимальных регуляторов. Баку: Элм, 1994, 274 с.
2. Larin V.B. High-accuracy algorithms for solution of discrete periodic Riccati equations., Appl. Comput. Math., v.6, №1, 2007, p.10-17.
3. Varga A. On computing High Accuracy solutions of a class of Riccati equations, Control-Theory and Advanced Technology, v.10, №4, part 5, 1995, p.2005-2016.

4. Раджабов М.Ф., Агамалиева Л.Ф., Велиева Н.И. Высокоточные алгоритмы факторизации полиномов и сепарации дробно-рациональных выражений. Доклады НАН Азербайджана, №1, 2009, с.29-37.
5. Thompson P.M., Program CC'S implementation of the Wiener-Hopf LQG optimal control problem, Optimal Control Applications & Methods, v.8, 1987, p.63-89.
6. Thompson P.M., Program CC'S implementation of pole-placement and LQG algorithms using Diophantine equations, Ibid., 1987, 8, p.91-101.

KƏSR RASİONAL MATRİSLƏR ÜÇÜN SİMVOL HESABLAMALARLA YÜKSƏK DƏQİQLİKLİ SEPARASİYA ALQORİTMİ

L.F.AĞAMALIYEVA

XÜLASƏ

İşdə MATLAB Proqramlar paketinin bazasında simvol hesablamalardan istifadə etməklə kərs-rasional matrislərin xəyali oxa və vahid çevrəyə nəzərən yüksək dəqiqlikli separasiya alqoritmi təklif olunmuşdur.

Açar sözlər: separasiya, kəsr-rasional matrislər, yüksək dəqiqlikli alqoritmlər.

HIGH-ACCURACY ALGORITHM FOR THE SEPARATION OF THE FRACTIONAL-RATIONAL MATRICES USING SYMBOLIC COMPUTATIONS

L.F.AGAMALIYEVA

SUMMARY

In the work high-accuracy algorithm is developed for the separation of the fractional-rational matrices with respect to imaginary axis and unit circle on the base of MATLAB symbolic computations.

Key words: separation, fractional-rational matrices, high-accuracy algorithm.

Поступило в редакцию: 18.06.2013 г.
Подписано к печати: 17.10.2013 г.